Geometría I
Examen XII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Ana María Hurtado Cortegana y Antonio Ros Mulero.

Descripción Parcial 1. Temas 1 y 2.

Fecha 19 de noviembre de 2024.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Demostrar los siguientes enuciados.

a) Sea V un espacio vectorial y $u, v, w \in V$ tres vectores tales que $u+v+w=0$. Si u y v son linealmente independientes entonces v y w también lo son.

b) Todo hiperplano vectorial de $\mathbb{R}^4$ contiene un vector no nulo de la forma

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3b \\ 4b \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

c) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden $n \geqslant 2$ y $\mathcal{U} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ el subconjunto de las matrices que conmutan con A. Entonces

(c1) $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial.

(c2) $\dim \mathcal{U} \geqslant 2$.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 2 & a & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para todo a, calcular una base del subespacio $U \subset \mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Sea $W \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial generado por las columnas de A.

(c1) Calcular, para todo a, la dimensión de W.

(c2) Demostrar que, para todo a, W está contenido en el subespacio $V \subset \mathbb{R}^4$ definido por

$$V \equiv ax + 2y - z = 0$$

(c3) Para todo a, calcular unas ecuaciones implícitas de W.

Ejercicio 1. Pasamos a demostrar cada uno de los enunciados:

a) De $u+v+w=0$ tenemos que $w=-u-v$. Para ver que v y w son linealmente independientes, sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $av+bw=0$. Entonces:

$$av+bw=av+b(-u-v)=av-bu-bv=(a-b)v-bu=0$$

Pero como u y v son linealmente independientes, entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ -b & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

Por lo que v y w son linealmente independientes.

b) El conjunto de vectores que son de la forma $(a,2a,3b,4b)$ para ciertos $a,b\in\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$V=\mathcal{L}\{(1,2,0,0),(0,0,3,4)\}$$

con $\dim V=2$. Sea ahora $H\subset\mathbb{R}^4$ un hiperplano vectorial de $\mathbb{R}^4$, entonces $\dim H=4-1=3$. Como tenemos dos subespacios en $\mathbb{R}^4$ cuya suma de dimensiones es mayor que 4, sabemos gracias a la fórmula de dimensiones:

$$\dim V+\dim H=\dim(V\oplus H)+\dim(V\cap H)$$

que su intersección es de al menos una recta vectorial, con lo que todo hiperplano H de $\mathbb{R}^4$ contiene algún vector no nulo de la forma $(a,2a,3b,4b)$ para ciertos $a,b\in\mathbb{R}$.

c) Demostramos los dos apartados:

(c1) Sabemos que $0\in\mathcal{U}$ y sean $B,C\in\mathcal{U}$ y $a\in\mathbb{R}$, entonces:

$$(aB+C)X=(aBX+CX)=(aXB+XC)=X(aB+C)$$

con lo que $aB+C\in\mathcal{U}$, concluimos que $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c2) Distingamos casos:

- Si $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $A=\alpha I$, entonces $\mathcal{U}=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ya que todas las matrices conmutan con αI para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$.
- Si no, entonces I y A son linealmente independientes y:

$$I\cdot A=A=A\cdot I \qquad A\cdot A=A\cdot A$$

ambas conmutan con A, con lo que $I,A\in\mathcal{U}$. Como tenemos dos matrices linealmente independientes en $\mathcal{U}$, concluimos que $\dim\mathcal{U}$ ha de tener al menos dimensión 2.